

确定性信号分解与平稳随机信号分解的统一研究

王宏禹, 邱天爽

(大连理工大学电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 对确定性信号分解与平稳随机信号分解进行了深入统一的研究。首先根据线性系统稳定性理论, 分别给出正则稳定情况下与边界稳定情况下 2 种信号分解的统一研究结果。然后根据线性空间投影理论, 分别给出正交投影情况下与自投影情况下 2 种信号分解的统一研究结果。前一种研究明确具体且物理意义清晰, 后一种研究数学意义与几何意义清晰, 将两者合在一起研究, 相得益彰。

关键词: 信号分解; 线性系统; 正则稳定; 边界稳定; 线性空间; 正交投影; 自投影

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

Unified study on the decomposition for deterministic signals and stationary random signals

WANG Hong-yu, QIU Tian-shuang

(Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The unified decomposition theories and methods for deterministic signals and stationary random signals were deeply studied. According to the stability theory of linear systems, the unified results of signal decomposition under both regular stable and boundary stable conditions were given respectively. The unified results of signal decomposition under both orthogonal projection and self projection conditions were also provided based on the linear space projection theory. The former is clear and definite in its physical meaning, and the latter is clear in its mathematical and geometrical meanings. They are both complement with each other.

Key words: signal decomposition, linear system, regular stability, boundary stability, linear space, orthogonal projection, self projection

1 引言

确定性信号与平稳随机信号的分解或展开已有许多研究^[1~5], 已为众所熟知。这 2 种信号(包括连续的与离散的、有限的与无限的)有许多共性, 可对它们进行统一研究。不过, 据文献调研, 目前尚未见到这种研究。为此, 本文对这 2 种信号分解进行了统一研究。由于确定性离散信号与平稳随机离散信号(以下均略去“离散”)可分别由 $\{\delta(n)\}$ 与白噪声序列 $\{w(n)\}$ 激励一线性时不变离散系统(以下均简称为线性系统)所产生, 所以这 2 种信号可由线性系统理论统一起来研究。线性系统稳定性分

为正则稳定的与边界稳定的, 前者为人们熟悉, 后者却不熟悉。本文对这 2 种信号于线性系统正则稳定与边界稳定情况下的信号分解, 给出了统一研究结果。对这 2 种信号的共性, 可由数学泛函分析的线性空间理论统一研究。线性空间投影分为正交投影与自投影, 前者为人们熟悉, 后者却不熟悉, 本文对这 2 种信号于线性空间正交投影与自投影情况下的信号分解, 给出了统一研究结果。

2 线性时不变离散系统及其稳定性

设因果线性时不变离散系统(以下为了简便起见, 再次将其简称为线性系统)的传递函数 $H(z)$ 为

收稿日期: 2015-10-14; 修回日期: 2016-08-25

通信作者: 邱天爽, qiutsh@dlut.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.61172108, No.61139001, No.81241059, No.61671105)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.61172108, No.61139001, No.81241059, No. 61671105)

有限阶 m 和 n 的有理函数^[5]

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad m < n \quad (1)$$

式(1)可表示为如下的零、极点模型, 有

$$H(z) = b_0 \frac{(1 - \eta_1 z^{-1})(1 - \eta_2 z^{-1}) \dots (1 - \eta_m z^{-1})}{(1 - \lambda_1 z^{-1})(1 - \lambda_2 z^{-1}) \dots (1 - \lambda_n z^{-1})} \quad (2)$$

在式(2)中, 分子项与分母项为 1 时分别对应于全极点模型与全零点模型。

$H(z)$ 为全极点模型时, 将其展开为部分分式, 当它所有极点不同时, 有

$$H(z) = \frac{C_1}{1 - \lambda_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - \lambda_2 z^{-1}} + \dots + \frac{C_n}{1 - \lambda_n z^{-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{1 - \lambda_i z^{-1}} \quad (3)$$

与 $H(z)$ 对应的格林函数 $g(k)$ 或脉冲响应 $h(k)$ 为

$$g(k) = h(k) = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^k \quad (4)$$

由此可见, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 使 $g(k) = h(k) \rightarrow 0$ 的唯一条件是 $\lambda_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。如果 $\lambda_i > 1$, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $g(k)$ 将无限增长。因此, 对线性系统, 若 $H(z)$ 所有极点均位于单位圆内时, 系统是稳定的, 而 $H(z)$ 只要有极点在单位圆外时, 系统是不稳定的。由于极点全部位于单位圆内, 有限阶全极点模型可以化为无限阶全零点模型, 所以, 若线性系统是稳定的, 则必定是因果的最小相位或最小时延系统。

若 $H(z)$ 的极点位于 z 平面的单位圆上, 线性系统处于稳定与不稳定的边界, 其稳定性要视极点在单位圆上的位置与 $H(z)$ 是否有相同的极点而定。当 $H(z)$ 在单位圆上有 l 个相同极点时, 则其格林函数 $g_l(k)$ 或脉冲响应 $h_l(k)$ 为

$$g_l(k) = h_l(k) = \sum_{i=1}^l C_i k^{i-1} \lambda_i^k \quad (5)$$

1) 极点位于单位圆实轴上, 即 $\lambda_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, l$ 。对 $l = 1$, 为 1 阶极点情况, $g_1(k) = h_1(k) = C$ (C 为常数)。对 $l = 2$, 为 2 阶极点情况, $g_2(k) = h_2(k) = C_1 + C_2 k$ (C_1 、 C_2 为常数), 它为 k 的线性增长函数, 对 l 一般情况, 有

$$g_l(k) = h_l(k) = \sum_{i=1}^l C_i k^{i-1} \quad (6)$$

它为 k 的 $l-1$ 阶多项式增长函数。

2) 在 z 平面单位圆上有一个一阶共轭极点时, 即 $\lambda_{1,2} = e^{\pm j\omega}$, 由式(5)有

$$g(k) = h(k) = (C_1 + C_2) \cos k\omega + j(C_1 - C_2) \sin k\omega = a \cos k\omega + b \sin k\omega \quad (7)$$

即 $g(k) = h(k)$ 为稳定的等幅正弦与余弦振荡函数。

式(7)中常数 $a = C_1 + C_2$, 常数 $b = j(C_1 - C_2)$ 。

若 $g(k) = h(k)$ 在 z 平面单位圆上共有 n 个不同的一阶共轭极点时, 则

$$g(k) = h(k) = \sum_{i=1}^n (a_i \cos k\omega_i + b_i \sin k\omega_i) \quad (8)$$

为 n 个不同频率的稳定等幅正弦与余弦振荡函数。

若 $g(k) = h(k)$ 在 z 平面单位圆上有 l ($1 < l \leq n$) 个相同共轭极点时, 则

$$g(k) = h(k) = \sum_{i=1}^l k^{i-1} (a_i \cos k\omega_i + b_i \sin k\omega_i) \quad (9)$$

为 l ($1 < l \leq n$) 个不同频率且幅度增长的正弦与余弦振荡函数。

由此可见, 当 $g(k) = h(k)$ 为常数与单个或多个等幅正弦与余弦振荡函数时, 线性系统是边界稳定的; 当 $g(k) = h(k)$ 为一线性增长、多项式曲线增长与单个或多个不同频率增长的正弦与余弦振荡函数时, 线性系统是边界不稳定的。

由以上研究, 线性系统的稳定性分为稳定的与边界稳定的, 本文为了使两者区分更加清楚, 对稳定的情况, 改称为正则稳定的情况, 因线性系统这种稳定情况是众所熟知的。

3 基于线性系统稳定性理论的信号分解

由于确定性(离散)信号与平稳随机(离散)信号分别由 $\{\delta(n)\}$ 与白噪声序列 $\{w(n)\}$ 激励一线性系统所产生, 故这 2 种信号分解可由线性系统理论统一研究。因线性系统稳定性有正则的与边界稳定的 2 种情况, 需要对它们分别进行研究。

3.1 线性系统正则稳定情况下的信号分解

正则稳定的线性系统有 3 种描述方式: z 域传递函数或时域格林函数、零极点模型、线性差分方程, 这 3 种描述方式可以互相转换, 可以从任何一种得到另外一种。欲利用正则稳定的线性系统对确定性信号与平稳随机信号的信号分解进行统一研究, 以采用格林函数描述方式为最佳, 其理由如下。

1) 数学物理意义清楚, 并为人们熟悉。这易由图 1 中线性系统的输入输出关系而得到。

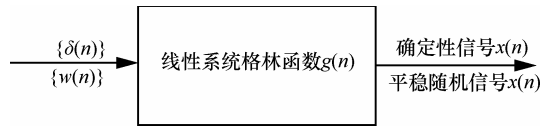


图 1 线性系统输入与输出关系

图 1 中确定性信号 $x(n)$ 为

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} g(n-i)\delta(i) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)\delta(n-i) \quad (10)$$

平稳随机信号 $x(n)$ 为

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} g(n-i)w(i) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)w(n-i) \quad (11)$$

2) 便于与后面研究的线性空间投影理论相联系, 得到几何意义解释。

对应于线性空间理论研究, $\{\delta(i)\}$ 可以视为标准正交基组 $\{e_i = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots]\}$, 同样, 白噪声 $w(n)$ 是正交的, 若其方差 $\sigma^2 = E[w^2(n)] = 1$, 也可视为标准正交基组。这样, 确定性信号 $x(n)$ 与平稳随机信号 $x(n)$ 均可视为线性空间中的一个矢量, 信号分解就是将 $x(n)$ 矢量分解 (或投影) 到标准正交基上, $g(i)$ 是 $x(n)$ 在相应基上的坐标, 如图 2 所示。图 2 中, $e_i \Leftrightarrow \delta(i)$ 时, 为确定性信号 $x(n)$ 在线性空间中的分解情况, 而 $e_i \Leftrightarrow w(i)$ 时, 为平稳随机信号 $x(n)$ 在线性空间中的分解情况。

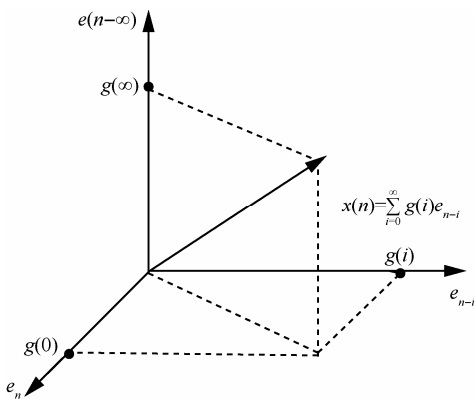


图 2 信号 $x(n)$ 的矢量分解

3) 可推广研究非平稳确定性信号与非平稳随机信号的分解, 详见文献[5]。

对正则稳定的线性系统, 要求其 n 阶全极点模型的极点 λ_i 不同, 并且 $\lambda_i < 1, i = 1, 2, \dots, n$ 。现对确定性信号与平稳随机信号的统一研究, 使用的是线性系统的格林函数 $g(k)$, 对它所要求的条件也应研

究清楚。先考虑一阶极点模型 $H(z) = \frac{1}{1 - \lambda z^{-1}}$, 它可化为一无穷阶全零点模型如下

$$H(z) = \frac{1}{1 - \lambda z^{-1}} = 1 + \lambda z^{-1} + \lambda^2 z^{-2} + \dots \quad (12)$$

对式(12)最后表示式进行因式分解, 当 $\lambda < 1$ 时, 显然其所有零点必须在单位圆内, 此种情况, 称为最小时延系统或最小相位系统。与式(12) $H(z)$ 对应的格林函数 $g(k)$ 或脉冲响应 $h(k)$ 为

$$g(k) = h(k) = \lambda^k \quad (13)$$

当 $k = 0, 1, 2, \dots$ 时, 得序列 $\{g(k)\} = \{h(k)\} = \{1, \lambda, \lambda^2, \dots\}$, 若 $\lambda < 1$, 则 $\{g(k) = \{h(k)\}$ 是因果最小时延序列或因果最小相位序列。此种一阶极点模型研究结果, 可以推广到 $\lambda_i < 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 且各 λ_i 不同的 n 阶全极点模型情况, 它就是 $\lambda_i < 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 时的式(3)与式(4)。

综上所述, 正则稳定的线性系统必定是因果的最小时延系统或最小相位系统, 而此种线性系统用格林函数描述时, 格林函数序列 $\{g(k)\}$ 应该是因果的最小时延或最小相位序列。

3.2 线性系统边界稳定情况下的信号分解

1) 边界稳定线性系统的格林函数与差分方程

边界稳定线性系统的格林函数 $g(k) = h(k)$ 为常数与单个或多个不同等幅与频率的正弦与余弦函数组成, 现研究与其对应的线性差分方程。先考虑如下单个等幅正弦函数情况

$$g(k) = h(k) = b \sin(k\omega + \varphi) \quad (14)$$

其中, b 为正弦函数的幅度, φ 为相位。由三角恒等式

$$\begin{aligned} & \sin(k\omega + \varphi) + \sin[(k-2)\omega + \varphi] \\ &= 2 \cos \omega \sin[(k-1)\omega + \varphi], -\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned} \quad (15)$$

结合式(14)和式(15)有

$$g(k) - 2 \cos \omega g(k-1) + g(k-2) = 0 \quad (16)$$

将式(16)表示成一般线性差分方程形式, 有

$$g(k) - a_1 g(k-1) - a_2 g(k-2) = 0 \quad (17)$$

式(17)中, $a_1 = 2 \cos \omega, a_2 = -1$ 。式(17)为一零输入二阶线性时不变差分方程。若线性系统由 n 个不同等幅与频率及相位的正弦函数组成时, 即

$$g(k) = h(k) = \sum_{i=1}^n b_i \sin(k\omega_i + \varphi_i) \quad (18)$$

则可得零输入 $2n$ 阶线性时不变差分方程, 为

$$g(k) - \sum_{i=1}^{2n} a_i g(k-i) = 0 \quad (19)$$

式(19)是 1 个零输入 $2n$ 阶线性时不变差分方程。对此种零输入差分方程, 由于 $g(k)$ 可由 $g(k)$ 的过去值 $g(k-i)$ ($i=1, 2, \dots, 2n$) 线性组合精确确定或精确预测, 因此, 对凡是零输入差分方程, 其所描述的信号 $x(k)$ 是可精确确定或可精确预测的。

对正则稳定的线性系统, 其格林函数 $g(k)$ 定义为 $\delta(n)$ 输入时线性系统的输出。现对边界稳定线性系统, 无需 $\delta(n)$ 输入。系统会自激而产生正弦与余弦振荡。因此, 前者定义的格林函数 $g(k)$ 对后者并不适用。为此, 对边界稳定的线性系统, 应寻求格林函数以外比较合适的定义方式。本文将系统自激所产生正弦与余弦振荡函数的线性组合定义为奇异的格林函数, 表示为 $g^{(s)}(k)$ 。这样, 由式(18)可得 $g^{(s)}(k)$ 的一般表示式为

$$g^{(s)}(k) = h^{(s)}(k) = \sum_{i=1}^n [a_i \cos(k\omega_i + \varphi_i) + b_i \sin(k\omega_i + \varphi_i)] \quad (20)$$

$g(k)$ 与 $g^{(s)}(k)$ 对比关系如表 1 所示。

表 1 $g(k)$ 与 $g^{(s)}(k)$ 的对比关系

正则稳定线性系统 $g(k)$	边界稳定线性系统 $g^{(s)}(k)$
单位圆内一阶极点 λ , $g(k) = \lambda^k$	单位圆上一阶共轭极点 $g^{(s)}(k) = a \cos k\omega + b \sin k\omega$
单位圆内 n 个不同极点 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$, $g(k) = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^k$	单位圆上单位圆内 n 个不同共轭极点 $g^{(s)}(k) = \sum_{i=1}^n [a_i \cos(k\omega_i + \varphi_i) + b_i \sin(k\omega_i + \varphi_i)]$

2) 线性系统边界稳定情况下的平稳随机信号
线性系统边界稳定情况下的正弦与余弦函数经平稳随机变量调制, 可以得到平稳随机信号^[6,7], 常见的有如下情况。

① 调相平稳随机信号

设单个信号时

$$x(k) = \cos(k\omega + \varphi) \quad (21)$$

式(21)中 ω 为常数, φ 为在 $[-\pi, \pi]$ 均匀分布的随机变量, 其概率密度在 $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ 为 $\frac{1}{2\pi}$ 。因 $x(k)$ 的自相关函数 $r(l)$ 为

$$\begin{aligned} r(k, k+l) &= E[x(k)x(k+l)] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos l\omega + \cos(2k\omega - l\omega + 2\varphi)] d\varphi \end{aligned}$$

上式后一项消失, 故

$$r(k, k+l) = E[x(k)x(k+l)] = \frac{1}{2} \cos l\omega = r(l)$$

由此可见, $r(l)$ 与时间 k 无关, 故 $x(k)$ 是平稳随机的。若

$$x(k) = \sum_{i=1}^n A_i \cos(k\omega_i + \varphi_i) \quad (22)$$

式(22)中 A_i 与 ω_i 为常数, φ_i 为 $[-\pi, \pi]$ 均匀分布的随机变量, 其概率密度在 $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ 为 $\frac{1}{2\pi}$, $i=1, 2, \dots, n$ 。 $x(k)$ 的自相关函数 $r(l)$ 为

$$r(l) = r(k, k+l) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos l\omega_i$$

可得到式(22)的 $x(k)$ 是平稳随机的。

② 调幅平稳随机信号

复正弦调幅信号 $x(k)$ 为

$$x(k) = \sum_{i=1}^n a_i e^{j\omega_i k} \quad (23)$$

式(23)中 ω_i 是常数, a_i 是互不相关的随机变量, 其均值为零, 方差 $\sigma_i^2 = E[a_i^2]$, $i=1, 2, \dots, n$ 。 $x(k)$ 的自相关函数为

$$r(l) = E[x(k)x(k+l)] = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 e^{j\omega_i l} \quad (24)$$

实正弦与实余弦调幅信号 $x(k)$ 为

$$x(k) = \sum_{i=1}^n (a_i \cos k\omega_i + b_i \sin k\omega_i) \quad (25)$$

在式(25)中, a_i 与 b_i 是互不相关的实随机变量, 均值为零, 且 $E[a_i^2] = E[b_i^2] = \sigma_i^2$, $i=1, 2, \dots, n$ 。 $x(k)$ 的自相关函数为

$$r(l) = E[x(k)x(k+l)] = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cos \omega_i l \quad (26)$$

由于式(24)与式(25)、式(23)与式(25)的调幅复正弦与实正弦与实余弦信号都是平稳随机的, 并且不难得出调幅与调相平稳随机信号的一般表示式为

$$x(k) = \sum_{i=1}^n [a_i \cos(k\omega_i + \varphi_i) + b_i \sin(k\omega_i + \varphi_i)] \quad (27)$$

其中, ω_i 为常数, a_i 、 b_i 与 φ_i 为随机变量, 且 a_i 与 b_i 互不相关, $E[a_i^2] = E[b_i^2] = \sigma_i^2$, φ_i 在 $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ 为概率密度 $\frac{1}{2\pi}$ 的均匀分布, $i=1, 2, \dots, n$ 。

对上述 3 种平稳随机信号，与调幅及调相调相平稳随机信号对应的线性差分方程是线性随机变量系数的随机差分方程，现尚未见到文献介绍，只有调相平稳随机信号对应的线性差分方程是线性常系数随机差分方程，可以对其进行研究。将式(22)改写为

$$x(k) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(k\omega_i + \varphi_0 + \varphi) \quad (28)$$

在式(28)中， $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ 为初相位。与式(28)对应的线性常系数随机差分方程为

$$x(k) - \sum_{i=1}^{2n} a_i x(k-i) = 0 \quad (29)$$

它是一个零输入的随机差分方程。

平稳随机序列 $\{x(n)\}$ ，其现在值 $x(n)$ 是不能由其过去值 $x(n-i)(i=1,2,\dots)$ 精确确定或精确预测的，但有的文献将预测误差 $\varepsilon(n)$ 的 $\sigma^2 = E[\varepsilon^2(n)]$ 为零时，定义为在均方意义下可精确确定或可精确预测的，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[x(k) - \sum_{i=1}^n a_i x(k-i)]^2 = E[\varepsilon^2(k)] = 0 \quad (30)$$

式(30)可进一步表示为

$$x(k) - \sum_{i=1}^n a_i x(k-i) = 0$$

上式即式(29)。这样，可知式(29)所示的零输入随机差分方程是均方意义下可精确确定或可精确预测的。

3) 线性系统边界稳定情况下信号分解的统一研究

由式(19)线性系统边界稳定情况下的奇异格林函数 $g^{(s)}(k)$ ，也就是此种情况下确定性信号 $x(k)$ 的分解表示式，即

$$x(k) = \sum_{i=1}^n [a_i \cos(k\omega_i + \varphi_i) + b_i \sin(k\omega_i + \varphi_i)]$$

它与平稳随机信号 $x(k)$ 分解表示式(27)相同，因此，可在数学上将两者统一起来。但应明确，对确定性信号 $x(k)$ ， a_i 、 b_i 、 ω_i 和 φ_i 均为常数，而对于平稳随机信号 $x(k)$ ， ω_i 为常数， a_i 与 b_i 是不相关的且有相同方差 σ_i^2 的随机变量， φ_i 是在 $[-\pi, \pi]$ 均匀分布的随机变量。

综上所述，线性系统在边界稳定情况下，系统可以自激而产生正弦与余弦振荡，将它们线性组合

起来，而产生所需要的信号。对此，在信号分析与处理中，称其为调和过程，以区别他激线性系统产生信号的一般线性过程。

4 基于线性空间投影理论的信号分解

利用线性空间投影理论来研究确定性与平稳随机信号的分解^[8-12]，不仅可使这 2 种信号分解在泛函数学框架下统一起来，并可从空间几何意义上对它们了解得更加清楚。

1) 几种线性空间的意义与关系

由信号序列或数据序列 $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ 组成的线性空间，若信号 x 是稳定的，其能量需是有限的，即 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ 。此种线性空间称为 l_2 空间。 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ 可表示成内积 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ 与 $P=2$ 的范数 $\|\mathbf{x}\|_2$ (P 范数定

义为 $\|\mathbf{x}\|_p = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$)，即

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|_2^2$$

从而有内积线性空间与赋范线性空间。由于范数有不同定义方式，它可不等于内积，对内积 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ 等于范数 $\|\mathbf{x}\|_2^2$ 的线性空间，称为希尔伯特空间，表示为 $H(X)$ 。由此可见，这 4 种线性空间意义是相同的。线性空间引入内积后，就可以把许多平面几何性质推广到 n 维或无穷维抽象空间。线性空间引入范数，就可以进行极限运算，以表明信号分解是收敛的，即 x_k 的极限为 x ，是指 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|^2 = 0$ ，称 x_k 均方收敛于 x ，并表示为 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ 。

对平稳随机信号的研究，若 ξ 与 η 是随机变量，有：① 内积是指 $\langle \xi, \eta \rangle = E[\xi\eta]$ ；② 范数是指 $\|\xi\| = \sqrt{E[\xi^2]}$ ；③ ξ 与 η 正交是指 $E[\xi\eta] = 0$ ；④ ξ_n 收敛于 ξ 是指 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\xi_k - \xi\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} E[\xi_k - \xi]^2 = 0$ 。这样，对确定性信号与平稳随机信号在数学表示上可进行统一研究。

2) 希尔伯特子空间投影

在希尔伯特子空间中，由非正交不相关的信号序列 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 所张成的子空间，将其表示为 $H_n(X) = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ， x_n 在子空间 $H_{n-1}(X) = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ 的投影表示为 \hat{x}_n ，投影误差为 ε_n ，则有

$$\varepsilon_n = x_n - \hat{x}_n, \quad \hat{x}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_{n-i} \quad (31)$$

式(31)中 α_i 为待定的线性组合系数。式(31)的关系如图 3 所示, $\varepsilon_n \perp H_{n-1}(X)$, ε_n 与 $H_{n-1}(X)$ 中各元素 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} 都正交。

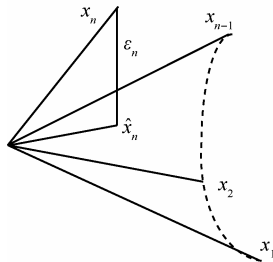


图 3 ε_n 在 $H_{n-1}(X)$ 投影

在对确定性信号的研究中, \hat{x}_n 为均方误差 $(x_n - \hat{x}_n)^2 = \varepsilon_n^2$ 最小对 x_n 的线性最优近似, 而在对平稳随机信号的研究中, \hat{x}_n 为均方误差 $E[(x_n - \hat{x}_n)^2] = E[\varepsilon_n^2]$ 最小对 x_n 的线性最优估计或最优一步预测, 在最优一步预测中, ε_n 是非线性依赖于 x_n 过去值而出现的消息。通常在希尔伯特子空间中研究的都是这种情况的投影, 将其称为正则投影。

在对确定性信号研究中, 若 $\varepsilon_n = 0$, 则 $x_n = \hat{x}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_{n-i}$, 即 x_n 在子空间 $H_{n-1}(X)$ 的投影是其自己, 现将这种投影称为自投影或奇异投影。这种情况的投影, $H_n(X) \equiv H_{n-1}(X)$, 对所有 n 均成立, 即所有子空间 $H_i(X)$, $i = n, n-1, \dots$ 是相同的。另外, x_n 可由其过去值 x_{n-1}, x_{n-2}, \dots 精确确定。在对平稳随机信号研究中, 应明确的是 $E[\varepsilon_n^2] = \sigma_n^2 = 0$ 为均方意义下的自投影或奇异投影, 而 x_n 可由其过去值 x_{n-1}, x_{n-2}, \dots 在均方意义下精确确定或精确预测。

根据上述, 信号 \mathbf{x} 在希尔伯特子空间上的投影分为 2 种, 一种是正则投影, 用 \mathbf{x}^u 表示, 另一种是自投影, 用 \mathbf{x}^v 表示。若 \mathbf{x}^u 与 \mathbf{x}^v 是不相关的, 且是同时存在的, 则有

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^u + \mathbf{x}^v \quad (32)$$

现在需要研究的是信号分解的问题。首先要解决如何将 \mathbf{x} 分成为 \mathbf{x}^u 与 \mathbf{x}^v , 这涉及使用格莱姆—施密特 (Gram-Schmidt) 正交化方法, 应对其做必要的介绍与研究。

3) 格莱姆—施密特正交化方法

格莱姆—施密特正交化方法是将非正交的线

性不相关序列 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 化成为正交的线性不相关序列 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$, n 可以是有限的, 也可以是无限的。该方法的基本思路是选择 x_1 作为 ε_1 ; 其次, 将 x_2 关于 x_1 进行正交分解并选择与 ε_1 正交的分量作为 ε_2 , 于是有 $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = 0$; 再次, 将 x_3 关于空间 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ 进行正交分解, 并选择正交于 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ 的分量作为 ε_3 。类此不断继续下去, 直至完成处理过程。这种方法的表示式为

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = x_1 \\ \varepsilon_2 = x_2 - \langle x_2, \varepsilon_1 \rangle \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|^2} \\ \varepsilon_3 = x_3 - \langle x_3, \varepsilon_1 \rangle \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|^2} - \langle x_3, \varepsilon_2 \rangle \frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|^2} \\ \vdots \\ \varepsilon_m = x_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle x_m, \varepsilon_i \rangle \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|^2}, \quad 2 \leq m \leq n \end{cases} \quad (33)$$

若 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ 欲成为 X 的标准正交基, 需要对式(33)进行归一化处理, 得

$$\begin{cases} e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \\ e_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, e_1 \rangle e_1}{\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|} \\ \vdots \\ e_m = x_m - \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \langle x_m, e_i \rangle e_i}{\|x_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle x_m, e_i \rangle e_i\|}, \quad 2 \leq m \leq n \end{cases} \quad (34)$$

格莱姆—施密特正交化过程可理解为前一希尔伯特子空间 $H_{i-1}(X)$ 增加一个正交基 ε_i 以得到后一子空间 $H_i(X)$, $i = 2, 3, \dots, n$, 从而成为不断扩大其子空间的过程, 如表 2 所示。

表 2 格莱姆—施密特正交化过程与 $H(X)$ 子空间扩大过程关系

正交化过程	子空间扩大过程
$\{x_1\} \Leftrightarrow \{\varepsilon_1\}$	$x_1 = \varepsilon_1, H_1(X) = H_1(\varepsilon_1),$ $\text{span}\{x_1\} = \text{span}\{\varepsilon_1\}$
$\{x_1, x_2\} \Leftrightarrow \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$	$H_2(X) = H_1(X) \oplus \varepsilon_2 =$ $\text{span}\{x_1\} \oplus \varepsilon_2 = \text{span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$
$\{x_1, x_2, x_3\} \Leftrightarrow \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$H_3(X) = H_2(X) \oplus \varepsilon_3 =$ $\text{span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \oplus \varepsilon_3 = \text{span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$
\vdots	\vdots
$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Leftrightarrow \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$	$H_n(X) = H_{n-1}(X) \oplus \varepsilon_n =$ $\text{span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$

表 2 中， \oplus 表示“直和”或“正交和”。由表 2 可得 $H_n(X)$ 由其子空间 $H_i(X)$, $i=1,2,\dots,n-1$ 扩大过程的表示式，为

$$H_n(X) = \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i(X) \quad (35)$$

式(35)中， n 可为无限，且有 $H_\infty(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i(X)$ 。

4) 希尔伯特子空间的正交投影

线性不相关的非正交信号序列 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 经格莱姆—施密特正交化方法可化为线性不相关的归一化正交信号序列 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ，这样，利用 $x \in H_n(X)$ 的线性子空间投影可将其转化为在 $H_n(E)$ 的线性子空间投影。当 $k < n$ 时， x 在 $H_n(E) = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 子空间的投影为

$$\begin{aligned} m_k &= \sum_{i=0}^{k-1} \langle x, e_{k-i} \rangle e_{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} g_i e_{k-i}, g_i = \langle x, e_{k-i} \rangle, i=0,1,\dots,k-1 \end{aligned} \quad (36)$$

当 $k = n$ 时，由于 x 在 $H_n(E)$ 中的投影 m_n 就是它自己，即 $m_n = x$ ，因此，得

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^{n-1} \langle x, e_{n-i} \rangle e_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} g_i e_{n-i}, g_i = \langle x, e_{n-i} \rangle, i=1,2,\dots,n-1 \end{aligned} \quad (37)$$

式(37)被称为 x 在希尔伯特子空间 $H_n(E)$ 的正交投影。

5) 线性空间正则投影信号 x^u 与自投影信号 x^v

x^u 的希尔伯特空间为 $H(X) = \text{span}\{x_1^u, x_2^u, \dots\}$ 。 x^v 的希尔伯特空间为 $H(X) = \text{span}\{x_1^v, x_2^v, \dots\}$ 。若 x^u 与 x^v 不相关， $x = x^u + x^v$ ，则 $H(x) = H(x^u) + H(x^v)$ 。 $H(x^u)$ 与 $H(x^v) \in H(x)$ ，且处在 2 个不相交相邻的 $H(x)$ 子空间上。为此，可令 $H(x^u) \in H_\infty(X)$ ， $H(x^v) \in H_{-\infty}(X)$ ，这是非常合理的。

对 x^u 采用希尔伯特子空间正交投影法，当 $n = \infty$ 时，由式(37)得信号分解式

$$\begin{aligned} x^u &= \sum_{i=0}^{n=\infty} \langle x, e_{n-i} \rangle e_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n=\infty} g_i e_{n-i}, g_i = \langle x, e_{n-i} \rangle, i=1,2,\dots \end{aligned} \quad (38)$$

这种情况与线性系统正则稳定情况下的信号分解式(10)相对应，因此，式(38)中标准正交基上的

坐标 g_i 对应于式(10)的最小延时或最小相位的格林函数 $g(i)$ 。

由表 2 可知，格莱姆—施密特的正交化过程是 $\{\varepsilon_1\} \rightarrow \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \rightarrow \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \rightarrow \dots \rightarrow \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ ， $H(X)$ 子空间扩大化过程是 $H_1(X) \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_3(X) \rightarrow \dots \rightarrow H_n(X)$ ，则它们的逆过程分别为去正交过程 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\} \rightarrow \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\} \rightarrow \dots \rightarrow \{\varepsilon_1\}$ 与 $H(X)$ 子空间减少过程 $H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow H_1(X)$ 。现采取 $H(X)$ 子空间减少过程，将 $x^u \in H_\infty(X)$ 从 $H(X) = H_\infty(X) + H(-\infty)$ 中分出，得到 $x^v \in H_{-\infty}(X)$ ，表示为

$$x^v \in H_{-\infty}(X) = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} H_i(X) \quad (39)$$

式(39)是与式(35)相对应的逆过程表示式。 x^v 是自投影的， $H_n(x^v) = H_{n-1}(x^v)$ ，对所有 n 均成立。这样， x_n^v 可由其过去值 $x_{n-1}^v, x_{n-2}^v, \dots$ 精确确定。

5 与信号沃尔德 (Wold) 分解关系

信号沃尔德分解 任意平稳随机信号 x 可以分解为 x^u 和 x^v 2 个平稳随机信号之和， $x = x^u + x^v$ ，其中， x^u 是平稳随机 MA(∞) 信号，即

$$x^u = w_n + \sum_{i=1}^{\infty} b_i w_{n-i} \quad (40)$$

式(40)中， w_n 是白噪声序列。 x^u 是不可精确预测的随机信号，也称为正则的随机信号。 x^v 与 x^u 不相关，它是均方意义可精确预测的随机信号，也称为奇异的随机信号。

对上述信号沃尔德分解，已有一些文献研究^[13-15]，并给出了严格数学证明，但均繁难，不易理解。本文研究与其研究有相似之处，但存在完全不同之处，有自己的许多新发展。

本文研究与信号沃尔德分解研究相似之处是均应用了泛函线性空间理论，一个是从线性空间投影理论研究，另一个是从线性空间预测理论研究。

本文研究与信号沃尔德分解研究完全不同之处主要有 2 个方面。1) 本文是对确定性信号分解与平稳随机信号分解进行了统一理论研究，而信号沃尔德分解是仅对平稳随机信号的理论研究。2) 本文提出了新的基于线性系统稳定性的信号分解统一理论，它分为 z 域单位圆内正则稳定的正则信号分解及 z 域单位圆上边界稳定的奇异信号分解，而奇异信号分解是正弦与余弦函数的线性组合。因此，

它非常具体明晰,可从物理意义上了解清楚,这非常有助于解决依据线性空间理论信号分解的统一研究中在这方面的不足之处。

6 结束语

本文依据线性系统稳定性理论与线性空间投影理论,给出了确定性信号与平稳随机信号的信号分解统一研究结果。前者的研究具体明确且物理意义清晰,后者的研究数学与几何意义清晰,对两者合在一起研究,可相得益彰,有助于对信号沃尔德分解的研究。

本文具有研究新发展前景,主要表现在 2 个方面。1) 确定性信号与平稳随机信号的信号分解,各自均可分成为正则信号分解与奇异信号分解,它们可有不同的线性组合方式,例如平稳随机信号的正则信号与确定性信号的奇异信号,它们的线性组合是方差平稳随机信号或均值具有趋向性的非平稳随机信号。因此,对它们的一些线性组合方式进行研究,是有创新发展前景的。2) 本文依据线性系统稳定性理论对信号分解的统一研究,可推广研究非平稳确定性信号与非平稳随机信号的统一研究,作者已对此做了研究,参见文献[5]。

参考文献:

- [1] 王宏禹. 信号处理相关理论综合与统一法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
WANG H Y. Synthesis and unification method in correlation theory of signal processing [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2005.
- [2] 王宏禹. 信号处理方法与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.
WANG H Y. The methods and applications of signal processing[M]. Beijing: China Machine Press, 2008.
- [3] 王宏禹, 邱天爽, 陈喆. 非平稳随机信号分析与处理(第二版)[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
WANG H Y, QIU T S, CHEN Z. Non-stationary random signal analysis and processing (second edition)[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008.
- [4] 王宏禹, 邱天爽. 微分方程格林函数法的研究[J]. 信号处理, 2015, 31(4): 379-385.
WANG H Y, QIU T S. Study on the differential equation using the Green's function[J]. Signal Processing, 2015, 31(4): 379-385.

- [5] 王宏禹, 邱天爽. 非平稳确定性信号与非平稳随机信号统一分类法的探讨[J]. 通信学报, 2015, 36(2): 2015028.
WANG H Y, QIU T S. Unified classification methods for determinate nonstationary signals and random nonstationary signals[J]. Journal on Communications, 2015, 36(2): 2015028.
- [6] PRIESTLEY M B. Spectral analysis and time series[M]. London: Academic Press Inc, 1981.
- [7] PAPOULIS A. Probability, random variables and stochastic processes [M]. New York: McGraw-Hill, 1984.
- [8] KAY S M, MARPLE S L. Spectrum analysis: a modern perspective[J]. Proc IEEE, 1981, 69(11):1380-1419.
- [9] ROBINSON E A. A historical perspective of spectrum estimation[J]. Proc IEEE, 1982, 70(9):885-907.
- [10] 李冬海. 频谱估计理论与应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2014.
LI D H. Spectrum estimation theory and application[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2014.
- [11] BREZINSKI C. Projection methods for liner systems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 77(1): 35-51.
- [12] GALANTAI A. Projectors and projection methods[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [13] ANDERSON T W. The statistical analysis of time series[M]. John Wiley & Sons, 2011.
- [14] LINDQUIST A, PICCI G. Linear stochastic systems: a geometric approach to modeling, estimation and identification[M]. Springer, 2015.
- [15] FRAZHO A E. Complements to models for noncommuting operators [J]. Journal of Functional Analysis, 1984, 59(3): 445-461.

作者简介:



王宏禹(1929-), 男, 北京人, 大连理工大学教授、博士生导师, 主要研究方向为信号信息处理。



邱天爽(1954-), 男, 江苏海门人, 博士, 大连理工大学教授、博士生导师, 主要研究方向为信号信息处理。